CLASA a XI-a
(bareme)

P 1 *Fie* $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *Să se arate că:*

a) $\operatorname{tr}(AA^t + A^tA^*) = (\operatorname{tr}A)^2$.

b) *Dacă* $|a_{12}| \neq |a_{21}|$, *matricea* $AA^t - A^tA$ *este inversabilă*

Benedict G. Niculescu (problema 27037 din GM 2/2015)

R. 1: Întrucât

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad (1 \text{ pct.})$$

avem $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$, $\operatorname{tr}(AA^t) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2$ (1 pct.) şi $\operatorname{tr}(A^tA^*) = 2a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - a_{21}^2$ (1 pct.) de unde rezultă egalitatea de la *a*). (1 pct.)

b) Avem

$$AA^t - A^tA = \begin{pmatrix} a_{12}^2 - a_{21}^2 & (a_{22} - a_{11})(a_{12} - a_{21}) \\ (a_{22} - a_{11})(a_{12} - a_{21}) & a_{21}^2 - a_{12}^2 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ pct.})$$

şi deci $\det(AA^t - A^tA) = -(a_{12} - a_{21})^2\left[(a_{12} + a_{21})^2 + (a_{22} - a_{11})^2\right]$. (1 pct.) Dacă $|a_{12}| \neq |a_{21}|$ rezultă că $\det(AA^t - A^tA) < 0$ şi de aici concluzia. (1 pct.) ■

P 2 *Fie* A *o matrice de ordinul doi cu elemente numere reale şi* A^t *matricea transpusă. Ştiind că* $\det(A + A^t) = 8$ *şi* $\det(A + 2A^t) = 27$, *să se calculeze* $\det A$.

Daniel Bănaru (problema 26994 din GM 11/2014)

R. 2: Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = \det(A + xA^t)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. (1 pct.) Evident $f(x) = (1 + x^2)\det A + \alpha x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.(1 pct.) Conform ipotezei $f(1) = 8$ (1 pct.) şi $f(2) = 27$, (1 pct.) deci $2\det A + \alpha = 8$ (1 pct.) şi $5\det A + 2\alpha = 27$, (1 pct.) de unde $\det A = 11$. (1 pct.) ■

P 3 *Fie* $p \geq 1$ *un număr natural. Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{pn} \sqrt{k^2 + 1}\, \sin(\arctan k - \arctan n).$$

Teodora Rădulescu şi Lucian Tuţescu (problema 27025 din GM 1/2015)

R. 3: Avem

$$\sin(\arctan k - \arctan n) = \quad (1 \text{ pct.})$$

$$= \sin(\arctan k)\cos(\arctan n) - \sin(\arctan n)\cos(\arctan k) = \quad (1 \text{ pct.})$$

$$= \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{k-n}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{n^2+1}} \quad (1 \text{ pct.})$$

şi atunci

$$\sum_{k=1}^{pn} \sqrt{k^2+1}\sin(\arctan k - \arctan n) = \frac{n^2(p^2-2p)+pn}{\sqrt{n^2+1}}. \quad (1 \text{ pct.})$$

Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{pn} \sqrt{k^2+1}\sin(\arctan k - \arctan n) = \begin{cases} -\infty, \text{dacă } p=1 \ \ (1 \text{ pct.}) \\ 1/2, \ \text{dacă } p=2 \ \ (1 \text{ pct.}) \\ +\infty, \text{dacă } p\geq 3. \ \ (1 \text{ pct.}) \end{cases}$$

■

P 4 *Fie* $x_1 \in (0,+\infty)$ *şi* $x_n = (x_{n-1})^2 + nx_{n-1} + n - 2$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Calculaţi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{(1+x_1)(2+x_2)...(n+x_n)}.$$

Dorel I. Duca

R. 4: Avem $n-2 \leq x_n$, oricare ar fi $n \geq 2$ (1 pct.) şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. (1 pct.) Pe de altă parte, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$1 + x_{n+1} \overset{(1 \text{ pct.})}{=} (n+x_n)(1+x_n) = ...$$
$$= (1+x_1)\prod_{k=1}^{n}(k+x_k), \quad (1 \text{ pct.})$$

de unde deducem că

$$\frac{x_{n+1}}{(1+x_1)(2+x_2)...(n+x_n)} = 1+x_1 - \frac{1}{(1+x_1)(2+x_2)...(n+x_n)}. \quad (1 \text{ pct.})$$

Întrucât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+x_1)(2+x_2)...(n+x_n)} = 0, \quad (1 \text{ pct.})$$

limita cerută este $1+x_1$. (1 pct.) ■