CONCURSUL DE MATEMATICA
"*Simon Petru*"
Ediţia a XVI-a, Tg. Mureş 16 ianuarie 2016

CLASA a X-a

P 1 *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^{\log_7 10} + 8^{\log_7 x} + 2 \cdot x^{\log_7 9} = 4 \cdot x^{\log_7 12}.$$

P 2 *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *şi numerele* $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ *astfel încât* $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$ *şi* $z_1 + z_2 + ... + z_n = 0$.

a) Demonstraţi că $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + ... + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n$, *pentru orice* $z \in \mathbb{C}$.

b) Demonstraţi că $|z - z_1| + |z - z_2| + ... + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}$, *pentru orice* $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$.

P 3 *Să se demonstreze că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea*

$$\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \leq \sin^2 \frac{A+B}{2} \sin^2 \frac{B+C}{2} \sin^2 \frac{C+A}{2}$$

P 4 *Să se demonstreze că*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} > \frac{n-1}{2n+2}.$$

Observaţie:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
Timp de lucru efectiv 3 ore.