CLASA a IX-a
(bareme)

P 1 *Dacă* $q \geq 3$ *şi* $r > 4q$ *sunt numere prime, determinaţi toate perechile* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *pentru care există un număr natural* $p \geq 1$ *cu proprietatea că*

$$\sqrt{p + 4qr} + \sqrt{p} = n \quad \text{şi} \quad \sqrt{p + 4qr} - \sqrt{p} = m.$$

Dorel I. Duca

R. 1: Fie $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o astfel de pereche; atunci există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{p + 4qr} + \sqrt{p} = n$ şi $\sqrt{p + 4qr} - \sqrt{p} = m$. Urmează că

$$mn = \left(\sqrt{p + 4qr} - \sqrt{p}\right)\left(\sqrt{p + 4qr} + \sqrt{p}\right) = 4qr. \text{ (2 pct.)}$$

Din ipotezele impuse asupra lui r şi q, deducem că

$$(n, m) \in \{(4qr, 1), (2qr, 2), (qr, 4), (2r, 2q), (4r, q), (r, 4q)\}. \text{ (2 pct.)}$$

(a) Dacă $(n, m) = (4qr, 1)$, atunci prin scăderea egalităţilor

$$\sqrt{p + 4qr} + \sqrt{p} = 4qr \quad \text{şi} \quad \sqrt{p + 4qr} - \sqrt{p} = 1,$$

obţinem $2\sqrt{p} = 4qr - 1$ ceea ce este imposibil. (0.5 pct)

(b) Dacă $(n, m) = (2qr, 2)$, atunci prin scăderea egalităţilor

$$\sqrt{p + 4qr} + \sqrt{p} = 2qr \quad \text{şi} \quad \sqrt{p + 4qr} - \sqrt{p} = 2,$$

obţinem $\sqrt{p} = qr - 1$ adică $p = (qr - 1)^2$. Deoarece $\sqrt{p + 4qr} = \sqrt{(qr - 1)^2 + 4qr} = qr + 1$, deducem că $(n, m) = (2qr, 2)$ este o pereche bună. (0.5 pct)

(c) Dacă $(n, m) = (qr, 4)$, atunci prin scăderea egalităţilor

$$\sqrt{p + 4qr} + \sqrt{p} = qr \quad \text{şi} \quad \sqrt{p + 4qr} - \sqrt{p} = 4,$$

obţinem $2\sqrt{p} = qr - 4$, adică $p = \left(\frac{qr-4}{2}\right)^2$. Deoarece $\sqrt{p + 4qr} = \sqrt{\left(\frac{qr-4}{2}\right)^2 + 4qr} = \frac{qr+4,}{2}$ deducem că $(n, m) = (qr, 4)$ este o pereche bună. (0.5 pct)

(d) Dacă $(n, m) = (2q, 2r)$, atunci prin scăderea egalităţilor

$$\sqrt{p + 4qr} + \sqrt{p} = 2q \quad \text{şi} \quad \sqrt{p + 4qr} - \sqrt{p} = 2r,$$

obţinem $\sqrt{p} = q - r$ adică $p = (q-r)^2$. Deoarece $\sqrt{p+4qr} = \sqrt{(q-r)^2 + 4qr} = q + r$, deducem că $(n,m) = (2q, 2r)$ este o pereche bună. (0.5 pct)

(e) Dacă $(n,m) = (4r, q)$, atunci prin scăderea egalităţilor

$$\sqrt{p+4qr} + \sqrt{p} = 4r \quad \text{şi} \quad \sqrt{p+4qr} - \sqrt{p} = q,$$

obţinem $2\sqrt{p} = 4r - q$ ceea ce este imposibil. (0.5 pct)

(f) Dacă $(n,m) = (r, 4q)$, atunci prin scăderea egalităţilor

$$\sqrt{p+4qr} + \sqrt{p} = r \quad \text{şi} \quad \sqrt{p+4qr} - \sqrt{p} = 4q,$$

obţinem $2\sqrt{p} = r - 4q$, ceea ce este imposibil. (0.5 pct) ■

P 2 *Dacă $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ este hexagonul regulat circumscris cercului de centru O şi rază 1, calculaţi lungimea vectorului*

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_1A_5} + \overrightarrow{A_1A_6}.$$

Dorel I. Duca

R. 2: Patrulaterul $A_1A_2A_4A_5$ este paralelogram (1 pct.) şi atunci $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_5} = \overrightarrow{A_1A_4}$. (1 pct.) Patrulaterul $A_1A_3A_4A_6$ este paralelogram (1 pct.) şi atunci $\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_6} = \overrightarrow{A_1A_4}$. (1 pct.) Urmează că

$$\overrightarrow{v} = \left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_5}\right) + \left(\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_6}\right) + \overrightarrow{A_1A_4} = 3\overrightarrow{A_1A_4}. \text{(1 pct.)}$$

Pe de altă parte, dacă notăm cu M punctul de tangenţă a laturii A_1A_2 cu cercul de centru O, atunci măsura unghiului $\widehat{A_1OM}$ este $\alpha = 30^0$ şi lungimea segmentului OM este 1. Urmează că $2.A_1M = OA_1$. (1 pct.) Teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul dreptunghic OA_1M ne dă $OA_1^2 = A_1M^2 + OM^2$ şi deci $OA_1 = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$. Atunci $A_1A_4 = 4\frac{\sqrt{3}}{3}$. Prin urmare, lungimea vectorului $\overrightarrow{v}$ este $12\frac{\sqrt{3}}{3}$. (1 pct.) ■

P 3 *Să se determine numerele reale a şi b ştiind că $a+b \in \mathbb{Z}$ şi $a^2+4b^2 =$* 4.

Dorel I. Duca

R. 3: Avem $a^2 \le 4$ şi $b^2 \le 1$. Urmează că

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \le a^2 + b^2 + 2\,|a|\,|b| \le 4 + 1 + 4 = 9$$

şi deci $a+b \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. (1 pct.)

a) Dacă $a+b=0$ obţinem $a=-b$ şi deci $5b^2=4$; rezultă $(a,b) \in \left\{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$. (1 pct.)

b) Dacă $a+b=1$ obţinem $a=1-b$ şi deci $5b^2-2b-3=0$; rezultă $(a,b) \in \left\{(0,1), \left(\frac{8}{5}, \frac{-3}{5}\right)\right\}$. (1 pct.)

c) Dacă $a+b=-1$, obţinem $5b^2+2b-3=0$; rezultă $(a,b) \in \left\{(0,-1), \left(\frac{-8}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}$. (1 pct.)

d) Dacă $a+b=2$ obţinem $a=2-b$ şi deci $5b^2-4b=0$; rezultă $(a,b) \in \left\{(2,0), \left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)\right\}$. (1 pct.)

e) Dacă $a+b=-2$ obţinem $a=-2-b$ şi deci $5b^2+4b=0$; rezultă $(a,b) \in \left\{(-2,0), \left(\frac{-4}{5}, \frac{-6}{5}\right)\right\}$. (1 pct.)

f) Dacă $a+b=\pm 3$ obţinem $a=\pm 3-b$ şi deci $5b^2 \pm 6b+5=0$, ecuaţii care nu au soluţii reale. (1 pct.) ■

P 4 *Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AB+CD \geq BC+AD$. Cercurile de diametre AB şi CD sunt tangente exterior. Să se demonstreze că $ABCD$ este trapez,*

Ion Pătraşcu (problema 26986 din GM 11/2014)

R. 4: Fie M şi N mijloacele laturilor AB şi respectiv CD. Condiţia de tangenţă a cercurilor de diametre AB şi CD este echivalentă cu $2MN=AB+CD$. (1 pct.) Pe de altă parte,

$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\right)+\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\right)= \text{(1 pct.)}$$
$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}, \text{(1 pct.)}$$

deci $2MN \leq AD+BC$, (1 pct.) cu egalitate pentru $AD \| BC$. (1 pct.) Cum

$$2MN=AB+CD \geq AD+BC \geq 2MN, \text{(1 pct.)}$$

egalitatea se impune şi cerinţa este demonstrată. (1 pct.) ■