CONCURSUL DE MATEMATICA
"*Simon Petru*"
Ediţia a XVI-a, Tg. Mureş 16 ianuarie 2016

XI. osztály

M1

P 1 *Legyen* $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *Igazold, hogy:*
a) $\operatorname{tr}(AA^t + A^tA^*) = (\operatorname{tr}A)^2$.
b) Ha $|a_{12}| \neq |a_{21}|$, *akkor az* $AA^t - A^tA$ *mátrix invertálható.*

P 2 *Legyen* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *mátrix és* A^t *a mátrix transzponáltja. Tudva, hogy* $\det(A + A^t) = 8$ *és* $\det(A + 2A^t) = 27$, *számítsd ki a* $\det A$ *értékét.*

P 3 *Legyen* $p \ge 1$ *egy természetes szám. Számítsd ki:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{pn} \sqrt{k^2+1}\sin(\arctan k - \arctan n).$$

P 4 *Legyen* $x_1 \in (0, +\infty)$ *és* $x_n = (x_{n-1})^2 + nx_{n-1} + n - 2$, *bármely* $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ *esetén. Számítsd ki:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{(1+x_1)(2+x_2)...(n+x_n)}.$$

Megjegyzés:
Minden feladat kötelező.
Minden feladat 7 pontot ér.
Munkaidő 3 óra.