CONCURSUL DE MATEMATICA
"*Simon Petru*"
Ediţia a XVI-a, Tg. Mureş 16 ianuarie 2016

XII. osztály
M1

P 1 *Legyen* $(G,\cdot)$ *egy csoport és tekintsük a* $Z(G)=\{x\in G: xy=yx, \forall y\in G\}$ *halmazt. Ha* $x^2=e$, *bármely* $x\in G\backslash Z(G)$ *igazold, hogy a* G *csoport kommutatív.*

P 2 *Legyen* $G=\{a,b,c,d,e\}$ *és a következő képlettel értelmezett* $\circ: G\times G\to G$ *művelet:*

$\circ$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	d
c	a	c	e	a	c
d	a	d	a	e	a
e	a	e	c	a	d

Ha $f: G\to G$, $f(x)=x\circ x$, *bármely* $x\in G$ *függvény, határozd meg* G*-nek az összes olyan nem üres* A *részhalmazát, amelyre* $f(A)=A$.

P 3 *Legyen* $n\geq 1$ *egy természetes szám. Határozd meg az* a *valós szám értékét, amelyre az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\inf\{t^n+a:\ t\geq x\}, ha\ x\geq 1\\ \sup\{-t^{2n}:\ t\leq x\},\ ha\ x<1,\end{cases}$$

függvény primitiválható $\mathbb{R}$*-en. Ebben az esetben határozd meg az* f *primitív függvényeit.*

P 4 *Legyen* $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ *egy* $\mathbb{R}$*-en primitiválható függvény. Mutasd ki, hogy a* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases}f(x),\ \ ha\ x<0\\ 2f(x), ha\ x\geq 0,\end{cases}$$

függvénynek nincs primitívje $\mathbb{R}$*-en.*

Megjegyzés:
Minden feladat kötelező.
Minden feladat 7 pontot ér.
Munkaidő 3 óra.