CONCURSUL DE MATEMATICA
"*Simon Petru*"
Ediţia a XVI-a, Tg. Mureş 16 ianuarie 2016

X. osztály

M1

P 1 *Oldd meg az*

$$x^{\log_7 10} + 8^{\log_7 x} + 2 \cdot x^{\log_7 9} = 4 \cdot x^{\log_7 12}.$$

egyenletet.

P 2 *Adottak az* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *és a* $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ *komplex számok úgy, hogy* $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$ *és* $z_1 + z_2 + ... + z_n = 0$.

a) Igazold, hogy $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + ... + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n$, *bármely* $z \in \mathbb{C}$ *esetén.*

b) Igazold, hogy $|z - z_1| + |z - z_2| + ... + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}$, *bármely* $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$.

P 3 *Bizonyítsd be, hogy bármely* ABC *háromszögben igaz a*

$$\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \leq \sin^2 \frac{A+B}{2} \sin^2 \frac{B+C}{2} \sin^2 \frac{C+A}{2}$$

egyenlőtlenség.

P 4 *Igazold, hogy*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} > \frac{n-1}{2n+2}.$$

Megjegyzés:
Minden feladat kötelező.
Minden feladat 7 pontot ér.
Munkaidő 3 óra.