CLASA a X-a
(bareme)

P 1 *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^{\log_7 10} + 8^{\log_7 x} + 2 \cdot x^{\log_7 9} = 4 \cdot x^{\log_7 12}.$$

Dorel I. Duca

R. 1: Ecuaţia are sens pentru $x > 0$. (1 pct.) Evident $x = 1$ este soluţie a ecuaţiei (1 pct.); să arătăm că este singura.Deoarece $8^{\log_7 x} = x^{\log_7 8}$, ecuaţia devine

$$x^{\log_7 10} + x^{\log_7 8} + 2 \cdot x^{\log_7 9} = 4.x^{\log_7 12}.\ (1 \text{ pct.})$$

Împărţind ambii membrii ai ecuaţiei cu $x^{\log_7 12}$ obţinem

$$x^{\log_7 \frac{5}{6}} + x^{\log_7 \frac{2}{3}} + 2 \cdot x^{\log_7 \frac{3}{4}} = 4.\ (1 \text{ pct.})$$

Deoarece $\log_7 \frac{5}{6} < 0$, $\log_7 \frac{2}{3} < 0$, şi $\log_7 \frac{3}{4} < 0$ deducem că funcţiile $f, g, h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) := x^{\log_7 \frac{5}{6}}, \quad g(x) := x^{\log_7 \frac{2}{3}}, \quad h(x) := x^{\log_7 \frac{3}{4}},\ \forall x > 0,$$

sunt strict descrescătoare. (1 pct.) Atunci şi funcţia $f + g + h$ este strict descrescătoare (1 pct.) şi deci ecuaţia are soluţia unică $x = 1$. (1 pct.) ■

P 2 *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *şi numerele* $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ *astfel încât* $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$ *şi* $z_1 + z_2 + ... + z_n = 0$.

a) Demonstraţi că $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + ... + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n$, *pentru orice* $z \in \mathbb{C}$.

b) Demonstraţi că $|z - z_1| + |z - z_2| + ... + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}$, *pentru orice* $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$.

Ioan Şerdean (problema 27005 din GM 12/2014)

R. 2: *a*) Avem

$$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 \overset{(1 \text{ pct.})}{=} \sum_{k=1}^{n} (z - z_k)(\overline{z} - \overline{z}_k) \overset{(1 \text{ pct.})}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(|z|^2 - \overline{z} z_k - z\overline{z}_k + |z_k|^2\right)$$
$$\overset{(2 \text{ pct.})}{=} n|z|^2 + n.$$

b) Avem

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|\right)^2 \overset{(1 \text{ pct.})}{\leq} n\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 \overset{(1 \text{ pct.})}{=} n\left(n|z|^2 + n\right) \overset{(1 \text{ pct.})}{\leq} 2n^2$$

şi de aici concluzia. ■

P 3 *Să se demonstreze că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea*

$$\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \le \sin^2 \frac{A+B}{2} \sin^2 \frac{B+C}{2} \sin^2 \frac{C+A}{2}$$

Neculai Stanciu (problema nr. 27115 din GM 9/2015)

R. 3: Deoarece

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}, ... \text{ şi } \sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{\pi - C}{2} = \cos \frac{C}{2}, ... \text{ (1 pct.)}$$

inegalitatea din enunţul problemei este echivalentă cu inegalitatea

$$64 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \le 1. \text{ (1 pct.)}$$

Întrucât

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, ... \text{ (1 pct.)}$$

ultima inegalitate este echivalentă cu inegalitatea

$$8(p-a)(p-b)(p-c) \le abc, \text{ (1 pct.)}$$

care, după înlocuirea lui $p = (a+b+c)/2$, devine

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc. \text{ (1 pct.)}$$

Punând $x = a+b-c$, $y = b+c-a$, $z = c+a-b$ obţinem $a = \frac{x+z}{2}$, $b = \frac{x+y}{2}$, $c = \frac{y+z}{2}$ şi ultima inegalitate primeşte forma

$$6xyz \le x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + yz^2 + yz^2. \text{ (1 pct.)}$$

Cum $x, y, z > 0$, după împărţirea ultimei inegalităţi cu $xyz > 0$, obţinem inegalitatea evidentă

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \ge 6. \text{ (1 pct.)}$$

■

P 4 *Să se demonstreze că*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} > \frac{n-1}{2n+2}.$$

Traian Tămâian (problema 26978 din GM 10/2014)

R. 4: Din inegalitatea mediilor avem

$$\sqrt[k]{(2k)} \overset{(1\text{ pct.})}{=} \sqrt[k]{1.3.5...(2k-1)}.\sqrt[k]{2.4....(2k)} < \text{(1 pct.)}$$

$$< \frac{1+3+...+(2k-1)}{k}.\frac{2+4+...+(2k)}{k} \overset{(1\text{ pct.})}{=} \frac{k^2}{k}.\frac{k(k+1)}{k} = k(k+1), \quad \text{(1 pct.)}$$

deci

$$\frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} > \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \text{(1 pct.)}$$

oricare ar fi numărul natural $k \geq 2$. Atunci

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} \overset{(1\text{ pct.})}{>} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{2(n+1)}. \quad \text{(1 pct.)}$$

■