CONCURSUL DE MATEMATICA

"*Simon Petru*"

Ediţia a XVI-a, Tg. Mureş 16 ianuarie 2016

CLASA a XII-a

P 1 *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup şi mulţimea* $Z(G) = \{x \in G : xy = yx, \forall y \in G\}$. *Dacă* $x^2 = e$, *pentru orice* $x \in G \backslash Z(G)$, *atunci grupul* G *este comutativ.*

P 2 *Fie* $G = \{a, b, c, d, e\}$ *şi* $\circ : G \times G \to G$ *legea definită prin*

$\circ$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	d
c	a	c	e	a	c
d	a	d	a	e	a
e	a	e	c	a	d

Dacă $f : G \to G$ *este funcţia definită prin* $f(x) = x \circ x$, *oricare ar fi* $x \in G$, *să se determine toate submulţimile nevide* A *ale lui* G *cu proprietatea că* $f(A) = A$.

P 3 *Fie* $n \geq 1$ *un număr natural. Să se determine numărul real* a *pentru care funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t^n + a : \ t \geq x\}, \textit{dacă } x \geq 1 \\ \sup\{-t^{2n} : \ t \leq x\}, \ \textit{dacă } x < 1, \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$. *Să se determine, în acest caz, primitivele funcţiei* f *pe* $\mathbb{R}$.

P 4 *Fie* $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *o funcţie care are primitive pe* $\mathbb{R}$. *Să se arate că funcţia* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{dacă } x < 0 \\ 2f(x), & \textit{dacă } x \geq 0, \end{cases}$$

nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

Observaţie:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
Timp de lucru efectiv 3 ore.