CLASA a XII-a
(bareme)

P 1 *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup şi mulţimea* $Z(G) = \{x \in G : xy = yx, \forall y \in G\}$. *Dacă* $x^2 = e$*, pentru orice* $x \in G \backslash Z(G)$, *atunci grupul* G *este comutativ.*

Mihai Opincariu (problema 27010 din GM 12/2014)

R. 1: Fie $a \in Z(G)$ şi $b \in G\backslash Z(G)$. Atunci $ab \in G\backslash Z(G)$, deci $(ab)^2 = e$, (1 pct.) de unde $abab = e$, adică $aabb = e$. (1 pct.) Cum $b^2 = e$, (1 pct.) obţinem $a^2 = e$, adică $x^2 = e$, pentru orice $x \in G$. (1 pct.) Urmează că, pentru orice $x, y \in G$,

$$x^2y^2 = e \text{ şi } (xy)^2 = e, \text{ (1 pct.)}$$

şi deci

$$xxyy = xyxy, \text{ (1 pct.)}$$

de unde, prin simplificare, rezultă $xy = yx$. Aşadar, grupul este comutativ. (1 pct.) ■

P 2 *Fie* $G = \{a, b, c, d, e\}$ *şi* $\circ : G \times G \to G$ *legea definită prin*

$\circ$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	d
c	a	c	e	a	c
d	a	d	a	e	a
e	a	e	c	a	d

Dacă $f : G \to G$ *este funcţia definită prin* $f(x) = x \circ x$*, oricare ar fi* $x \in G$*, să se determine toate submulţimile nevide* A *ale lui* G *cu proprietatea că* $f(A) = A$.

Dorel I. Duca

R. 2: Fie $A \subseteq G$ cu $A = f(A)$. (1 pct.) Rezultă că $A \subseteq \operatorname{Im} f$. (1 pct.) Avem $f(a) = a$, $f(b) = b$, $f(c) = e$, $f(d) = e$, $f(e) = e$. (1 pct.) Deoarece $d \in A$ dacă şi numai dacă $e \in A$, (1 pct.) urmează că submulţimile cerute sunt $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{a, b, d, e\}$. (3 pct.) ■

P 3 *Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se determine numărul real a pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t^n + a : \ t \geq x\}, \textit{ dacă } x \geq 1 \\ \sup\{-t^{2n} : \ t \leq x\}, \ \textit{dacă } x < 1, \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$. Să se determine, în acest caz, primitivele funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

Dorel I. Duca

R. 3: Avem

$$f(x) = \begin{cases} x^n + a, \text{dacă } x \in [1, +\infty) \\ 0, \qquad \text{dacă } x \in [0, 1) \\ -x^{2n}, \ \text{dacă } x \in (-\infty, 0). \end{cases} \qquad \text{(1 pct.)}$$

Să presupunem că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$. Atunci există trei numere reale c_1, c_2, c_3 astfel încât

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + ax + c_1, \text{dacă } x \in [1, +\infty) \\ c_2, \qquad \text{dacă } x \in [0, 1) \\ -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c_3, \ \text{dacă } x \in (-\infty, 0). \end{cases} \qquad \text{(1 pct.)}$$

Cum orice primitivă este continuă, deducem că funcţia F este continuă în punctele 0 şi 1, deci avem

$$F(0) = F(0-0) = F(0+0) \quad \text{şi} \quad F(1) = F(1-0) = F(1+0),$$

de unde rezultă $c_3 = c_2$ şi $c_1 = c_2 - \frac{1}{n+1} - a$. (1 pct.) Prin urmare, funcţia F are forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + ax + c_2 - \frac{1}{n+1} - a, \text{dacă } x \in [1, +\infty) \\ c_2, \qquad \text{dacă } x \in [0, 1) \\ -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c_2, \qquad \text{dacă } x \in (-\infty, 0). \end{cases} \qquad \text{(1 pct.)}$$

Întrucât orice primitivă este derivabilă, rezultă că

$$F_s'(0) = 0 = F_d'(0) \quad \text{şi} \quad F_s'(1) = 0 = 1 + a = F_d'(1),$$

de unde deducem că $a=-1$. (1 pct.)

Aşadar, dacă funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$, atunci $a=-1$. Pentru $a=-1$, funcţia f devine

$$f(x)=\begin{cases} x^n-1, & \text{dacă } x\in[1,+\infty) \\ 0, & \text{dacă } x\in[0,1) \\ -x^{2n}, & \text{dacă } x\in(-\infty,0), \end{cases}$$

iar primitiva F a lui f are forma

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}-x+\frac{n}{n+1}+c, & \text{dacă } x\in[1,+\infty) \\ c, & \text{dacă } x\in[0,1) \\ \frac{-x^{2n+1}}{2n+1}+c, & \text{dacă } x\in(-\infty,0). \end{cases} \quad \text{(1 pct.)} \tag{1}$$

Pe de altă parte, funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de (1) este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=f(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Prin urmare funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $a=-1$. Mai mult, primitivele $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ale lui f au forma (1). (1 pct.) ∎

P 4 *Fie $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ o funcţie care are primitive pe $\mathbb{R}$. Să se arate că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin*

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \textit{dacă } x<0 \\ 2f(x), & \textit{dacă } x\geq 0, \end{cases}$$

nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

Marian Andronache (problema 26969 din GM 9/2014)

R. 4: Presupunem că g admite primitive pe $\mathbb{R}$. (1 pct.) Vom arăta că g/f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Fie deci $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi fie $\gamma\in\mathbb{R}$ situat între $h(a)$ şi $h(b)$. Pentru fixarea ideilor să presupunem că $h(a)<\gamma<h(b)$. Deoarece funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$, deducem că funcţia f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Întrucât $f(a), f(b)>0$, relaţiile $h(a)<\gamma<h(b)$ ne conduc la relaţiile

$$g(a)-\gamma f(a)<0<g(b)-\gamma f(b). \text{ (1 pct.)}$$

Pe de altă parte, funcţia $g-\gamma f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi deci funcţia $g-\gamma f$ are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. (1 pct.) Atunci există cel puţin un punct $c\in]a,b[$ astfel încât $g(c)-\gamma f(c)=0$, deci în aşa fel încât $h(c) = \gamma$. (1 pct.) Aşadar funcţia $h = g/f$ are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. (1 pct.) Dar

$$\frac{g}{f}(x) = \begin{cases} 1, \text{dacă } x < 0 \\ 2, \text{dacă } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{(1 pct.)}$$

deci $\frac{g}{f}$ nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$, contradicţie. (1 pct.) ■