Concursul de matematică "Simon Petru"
Ediţia a XV-a
Tg.-Mureş, 10.01.2015

Barem Clasa a V-a

Subiectul I

Fie numerele: $A=\left[2+2^2\cdot 2^{24}+2^{95}:2^{14}+2\cdot\left(3^2\right)^{25}\right]:\left(1+2^{25}+2^{80}+3^{50}\right)\cdot 1^{300}-2+3^{16}$

$B=2^{70}-\left\{2^3\cdot\left(2^3+2^2+2^1+2^0\right)-\left[5-(10000-9375):5^3\right]:9^{1992}-26\cdot 2^2\right\}\cdot 2^{65}$.

Comparaţi numerele A şi B.

Soluţie

$A=\left[2+2^{26}+2^{81}+2\cdot 3^{50}\right]:\left(1+2^{25}+2^{80}+3^{50}\right)\cdot 1-2+3^{16}$ **(1p)**

$A=2\left[1+2^{25}+2^{80}+3^{50}\right]:\left(1+2^{25}+2^{80}+3^{50}\right)\cdot 1-2+3^{16}$ **(1p)**

$A=2-2+3^{16}=3^{16}$ **(1p)**

$B=2^{70}-\left\{2^3\cdot 15-\left[5-625:5^3\right]:(3^2)^{1992}-26\cdot 2^2\right\}\cdot 2^{65}$

$B=2^{70}-\left\{2^3\cdot 15-\left[5-625:125\right]:3^{3984}-26\cdot 2^2\right\}\cdot 2^{65}$ **(2p)**

$B=2^{70}-(120-104)\cdot 2^{65}$

$B=2^{70}-2^{69}=2^{69}=8^{23}$ **(1p)**

$\Rightarrow B>A$ **(1p)**

Subiectul II

a) Aflaţi câte numere mai mici decât 2015 există, astfel încât dacă înmultim pe oricare dintre ele cu 5, obţinem un număr cel putin egal cu 2015.

b) Câte numere cuprinse între 115 şi 2015 se pot scrie ca produsul a patru numere naturale consecutive?

Prof.Florica şi Vasile Ginţa, Tg.Mures

Soluţie

a)

2015:5 = 403, cel mai mic numar ce indeplineste condiţia din enunţ. **(1p)**

Numerele căutate sunt: 403, 404, ... , 2014. **(2p)**

Numărul numerelor din şirul de mai sus este egal cu 2014-403+1= 1612 **(1p)**

b)

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24<115$ si $6\cdot 7\cdot 8\cdot 9=3024>2015$ **(1p)**

Numerele care verifică cerinţa sunt: $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$, $3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$, $4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$, $5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$, adica 4 numere. **(2p)**

Subiectul III

Suma a trei numere consecutive este 3^{2015}. Demonstrați că produsul celor trei numere este divizibil cu 10.

Soluție

Fie $a, a+1, a+2$ numerele consecutive, suma lor: $3 \cdot a + 3 = 3^{2015}$. **(1p)**
Împărțind relația la 3 obținem $a = 3^{2014} - 1$ **(1p)**
Deci numerele căutate sunt: $3^{2014} - 1, 3^{2014}, 3^{2014}$+1. **(2p)**
Aflăm ultimele cifre ale celor 3 numere:
$U(3^{2014} - 1) = 9 - 1 = 8$
$U(3^{2014}) = 9$
$U(3^{2014} + 1) = 9 + 1 = 10$ **(2p)**
de unde deducem că ultima cifră a produsului este 0,
deci produsul numerelor este divizibil cu 10 **(1p)**

Subiectul IV

Fie 10 bile colorate cu câte o culoare. Arătați că ori există 4 bile colorate la fel ori există 4 bile de culori diferite.

Soluție

Dacă există 4 bile colorate la fel, atunci concluzia se verifică. **(2p)**

Dacă nu există 4 bile colorate la fel, atunci există cel mult 3 bile de aceeași culoare. **(2p)**

Dar 10=3+3+3+1, deci trebuie să existe 4 culori. **(3p)**

Concursul de matematică "Simon Petru"
Ediţia a XV-a
Tg.-Mureş, 10.01.2015

Barem Clasa a VI-a

Subiectul I.

a) Arătați că $1+5+5^2+5^3+...+5^{2015} \vdots 31$
b) Aflați *a* și $b \in \mathbf{N}^*$ știind că $(a;b)=15$ și $2a+5b=330$

Soluție

a) $1+5+5^2=31$

Se grupează termenii câte 3. (1p)

$1+5+5^2+5^3(1+5+5^2)+...+5^{2013}(1+5+5^2) \vdots 31$ (1p)

$31(1+5^3+5^6+.......+5^{2013}) \vdots 31$ (1p)

b) a=15x

b=15y, (x,y)=1 (1p)

2·15·x+5·15·y=330

2·x+5·y=22 (1p)

Dacă y=1⇒2x=17 (F)

Dacă y=2⇒x=6 nu sunt numere prime între ele

Dacă y=3⇒2x=7 (F)

Dacă y=4⇒x=1⇒a=15

b=60 (2p)

Subiectul II.

Calculați : $S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{930}$,

$$S_2=\left(\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{2015}{2014}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2014}\right).$$

Soluție

$S_1=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{30\cdot31}=$ 1p

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{30} - \frac{1}{31} =$ 1p

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{31} = \frac{30}{31}.$ 1p

$S_2 = \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{2015}{2014} - \frac{1}{2014}\right) =$ 2p

$= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 =$ 1p

$= 2014$ 1p

Subiectul III.

Fie unghiul obtuz $\widehat{AOB}$, [OC bisectoarea lui, iar [OD semidreapta opusă semidreptei [OC. Dacă [OE⊥[OA, [OE în interiorul unghiului $\widehat{AOB}$, iar [OF bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$. Să se afle $m(\widehat{EOB})$ știind că [OA și [OF sunt semidrepte opuse.

Soluție

Fie $m(\widehat{AOC})=m(\widehat{BOC})=x$ (1p)

$m(\widehat{AOC})=m(\widehat{DOF})=x$ (opuse la vârf) (1p)

[OF bisectoare $\Rightarrow m(\widehat{DOF})=m(\widehat{BOF})=x$ (2p)

$\Rightarrow m(\widehat{DOF})+m(\widehat{BOF})+m(\widehat{BOC})=180^o$ (2p)

$\Rightarrow m(\widehat{EOB})=30^o$ (1p)

Subiectul IV.

Arătați că $3^{2014}+4^{2014}<5^{2014}$

(Gazeta matematică)

Soluție

$3^{2014}+4^{2014}=9^{1007}+16^{1007}$ (2p)

$9^{1007}+16^{1007}<(9+16)^{1007}$ (4p)

$(9+16)^{1007}=25^{1007}=5^{2014}$ (1p)

Concursul de matematică "Simon Petru"
Ediţia a XV-a
Tg.-Mureş, 10.01.2015

Barem Clasa a VII-a

Subiectul 1.

Fie numerele $x_1 = 1+1$, $x_2 = 1+\frac{1}{2}$, $x_3 = 1+\frac{1}{3}$, …, $x_{2014} = 1+\frac{1}{2014}$, …, $x_n = 1+\frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Arătaţi că $P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2014}$ este număr natural.

b) Determinaţi numărul $n \in \mathbf{N}^*$, pentru care $x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2}$ este număr natural.

Soluție

a) $P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2014} = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{2014}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2015}{2014} = 2015$,

deci este număr natural. (3p)

b) $x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} = \frac{n+3}{n} = 1+\frac{3}{n} \in N \Rightarrow$

$\frac{3}{n} \in N \Rightarrow n \in \{1,3\}$. (4p)

Subiectul II.

Fie numerele naturale nenule a, b, c direct proporționale cu $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, respectiv $\overline{ab}$. Arătați că numărul $n = \sqrt{\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{3a}{a+b+c} + \frac{6b}{a+b+c} + \frac{9c}{a+b+c}\right)}$ este natural.

Soluție

$\frac{a}{\overline{bc}} = \frac{b}{\overline{ca}} = \frac{c}{\overline{ab}} = \frac{a+b+c}{11(a+b+c)} = \frac{1}{11}$.. (2p)

De unde $11a = 10b + c$, $11b = 10c + a$ și $11c = 10a + b$. (1p)

Din relațiile de mai sus se deduce $a = b = c$. (3p)

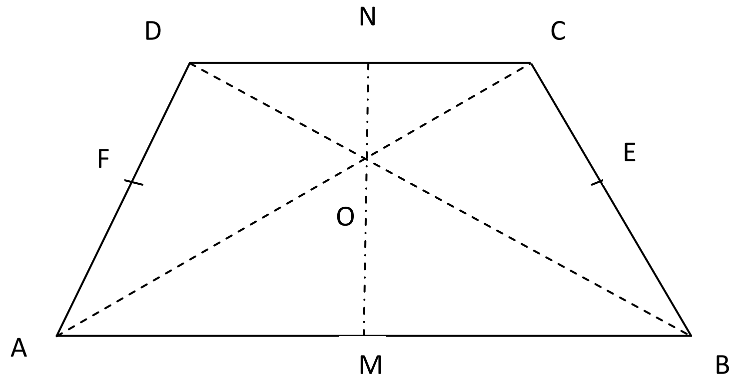
Atunci $n = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{3}+\frac{6}{3}+\frac{9}{3}\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot 6} = \sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N}$. (1p)

Subiectul III.

Arătați că într-un trapez isoscel înălțimea este egală cu linia mijlocie dacă și numai dacă diagonalele sunt perpendiculare.

(Gazeta matematica)

Soluție



Cazul I. Dacă $AC \perp BD$

Se demonstrează că OM = AM și ON = DN. (2p)

Atunci $MN = OM + ON = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{AB+DC}{2} = l.m.$ (1p)

Cazul II. Dacă MN = FE

Deoarece M, E, N, F sunt mijloace de laturi MENF este paralelogram (1p)

dar avâmd diagonalele egale rezultă MENF deaptunghi, adică $FM \perp ME$ (*) (1p)

Dar $FM \parallel BD, l.m. in \Delta ABD$, $ME \parallel AC, l.m. în\ \Delta ABC$ (1p)

și ținând cont de (*) rezultă $AC \perp BD$. (1p)

Subiectul IV

În ΔABC notăm cu M mijlocul segmentului (BC) şi $P \in (BC)$ un punct arbitrar. Fie $PT \| AB, T \in (AC), PR \| AC, R \in (AB)$. Dacă $PR \cap AM = \{E\}$ şi $AM \cap TP = \{F\}$, arătaţi că patrulaterul $BECF$ este paralelogram. **(Matlap)**

Soluție

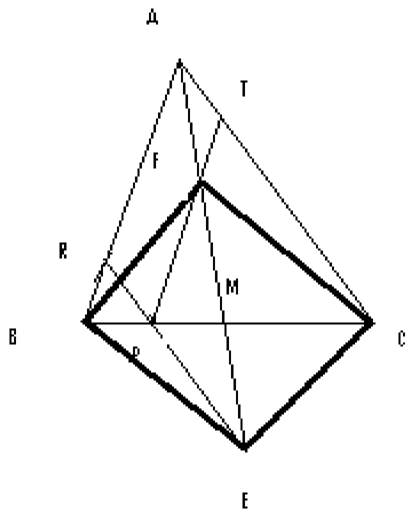
În $_{\Delta}ABM$ $PF \| AB \overset{T.Th.}{\Rightarrow} \frac{MF}{MA} = \frac{MP}{MB} (1)$. (2p)

$PE \| AC, P \in MC, E \in MA$, din teorema fundamentală de asemănare rezultă că

$_{\Delta}MPE \approx _{\Delta} MCA \Rightarrow \frac{MP}{MC} = \frac{ME}{MA} = \frac{PE}{CA} (2)$. (2p)

$MB = MC, (1), (2) \Rightarrow \frac{MF}{MA} = \frac{ME}{MA} \Rightarrow MF = ME$. (2p)

Diagonalele patrulaterului $BECF$ se înjumătăţesc, deci $BECF$ este paralelogram (1p)



Concursul de matematică "Simon Petru"
Ediţia a XV-a
Tg.-Mureş, 10.01.2015

Barem Clasa a VIII-a

Subiectul I

a) Arătați că $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$.

b) Fie $S=\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+...+\frac{4029}{2014^2\cdot 2015^2}$. Arătați că $1-S>0$.

Soluție

a) Demonstrarea relației (2p)

b) Folosind a) avem $S=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2014^2}-\frac{1}{2015^2}=1-\frac{1}{2015^2}$ (3p)

De unde $1-S=\frac{1}{2015^2}>0$ (2p)

Subiectul II

Fie x si y numere raționale nenule astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2014}$.

Aratați că $\sqrt{\left|\frac{x}{38}-53\right|\cdot\left|\frac{y}{38}-53\right|}$ este număr natural.

Gazeta matematica 2014

Soluție

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2014}\Rightarrow\frac{xy}{x+y}=2014=53\cdot 38$$ **(1p)**

$$\left|\frac{x}{38}-53\right|\cdot\left|\frac{y}{38}-53\right|=\frac{1}{38^2}\cdot|x-2014|\cdot|y-2014|$$ **(1p)**

$$|x-2014|\cdot|y-2014|=|(x-2014)\cdot(y-2014)|=\left|\left(x-\frac{xy}{x+y}\right)\cdot\left(y-\frac{xy}{x+y}\right)\right|$$ **(2p)**

$$\left|\left(x-\frac{xy}{x+y}\right)\cdot\left(y-\frac{xy}{x+y}\right)\right|=\left|\frac{x^2}{x+y}\cdot\frac{y^2}{x+y}\right|=\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2$$ **(2p)**

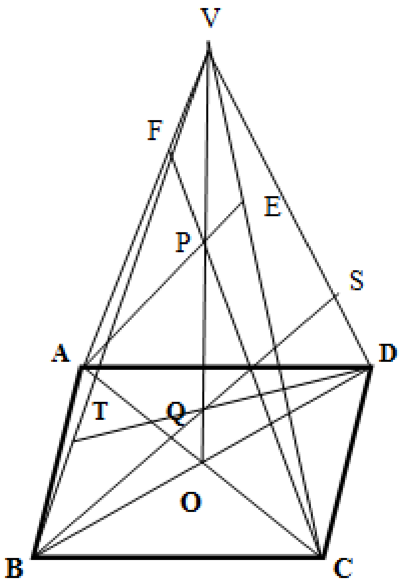
Deci, $\sqrt{\left|\frac{x}{38}-53\right|\cdot\left|\frac{y}{38}-53\right|}=\sqrt{\frac{1}{38^2}\cdot\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{38^2}\cdot 2014^2}=53\in N$. **(1p)**

Subiectul III.

Fie piramida patrulateră regulată VABCD, $\{O\} = AC \cap BD$ si $P, Q \in (VO)$. Dacă $\{E\} = AP \cap CV$, $\{F\} = CP \cap AV$, $\{S\} = BQ \cap DV$ si $\{T\} = DQ \cap BV$, arătați că măsura unghiului dintre dreptele EF și ST nu depind de alegerea punctelor P si Q pe segmentul VO.

Gazeta matematica 2014

Soluție



In triunghiul VAC avem ca $AE \cap CF \cap VO = \{P\} \Rightarrow \frac{VF}{FA} \cdot \frac{AO}{OC} \cdot \frac{CE}{VE} = 1$(Am aplicat teorema Ceva).**(2p)**

Cum AO=CO, deducem ca $\frac{VF}{FA} = \frac{VE}{CE}$. Din aceasta relatie conform reciprocei teoremei lui Thales deducem ca $FE \| AC$ (1). **(2p)**

Cum $BD \perp AC$ si $AC \perp VO \Rightarrow AC \perp (VBD) \Rightarrow AC \perp ST$ (2). **(2p)**

Din relatiile (1) si (2) deducem ca $FE \perp ST$ si deci $m[\sphericalangle(EF, ST)] = 90^0$. **(1p)**

Subiectul IV

În vârfurile A, B și C ale triunghiului ABC se ridică perpendicularele AA', BB' și CC', de aceeași parte a planului (ABC), astfel încât $AA' = BC$, $BB' = AC$ și $CC' = AB$. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, iar O este centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$, arătați că HO$\perp$($A'B'C'$)

Soluție

$\Delta CBB' \equiv \Delta A'AC$ (C.C.) $\Rightarrow$ $A'C = B'C$

Fie M mijlocul segmentului $[A'B']$, din $\Delta CB'A'$ isoscel $\Rightarrow$ $A'B' \perp CM$ (1p)

Dar, $A'B' \perp$OM $\Rightarrow$ $A'B' \perp (MOC)$. (1p)

$$\left.\begin{matrix} CH \perp AB \\ CH \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow CH \perp (AA'B) \Rightarrow A'B' \perp CH$$ (1p)

Deoarece $A'B' \perp CM$ $\Rightarrow$ $A'B' \perp (CMH)$ $\Rightarrow$ planele (CMH) și (CMO) coincid $\Rightarrow$ $HO \perp A'B'$. (1p)

Analog putem demonstra că $HO \perp A'C'$. (2p)

Concluzie HO$\perp$($A'B'C'$) (1p)