## CLASA a IX-a

**P 1** *Fie $ABC$ un triunghi înscris într-un cerc de centru $O$. Fie $P$ şi $Q$ simetricele ortocentrului şi a vârfului $A$ faţă de mijlocul laturii $BC$. Să se arate că*

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}.$$

Mihaela Berindeanu, GM problema 26888

**R. 1** Cum $P$ este simetricul ortocentrului triunghiului $ABC$ faţă de mijlocul laturii $BC$, rezultă că $AP$ este diametru în cercul circumscis triunghiului $ABC$ (2 puncte), deci $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OP}$ (1 punct). Atunci

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP},$$

(4 puncte - fiecare egalitate 1 punct) ceea ce trebuia arătat. ∎

**P 2** *Fie $a, b, c, d$ numere reale cu $ac + bd = 0$. Să se arate că*

$$\frac{a+b+c+d}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}}.$$

Radu Pop, GM problema 26778

**R. 2** Este suficient ca

$$\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} \text{ (1 punct)}$$

sau echivalent

$$(a+b+c+d)^2 \leq 2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \quad (1 \text{ punct}).$$

Din $ac + bd = 0$ avem

$$(a+b+c+d)^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2bc + 2cd + 2ad. \quad (3 \text{ puncte})$$

Inegalitatea revine la

$$0 \leq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (d-a)^2, \quad (2 \text{ puncte})$$

care este adevărată. ∎

**P 3** *Profesorul de matematică scrie pe tablă numerele* 12345 *şi* 678. *În ordinea din catalog, fiecare elev vine la tablă şi scrie un număr care este suma, diferenţa sau produsul oricăror două numere deja scrise pe tablă. Ultimul număr scris poate fi* 2015?

Dorel I. Duca

**R. 3** Nu se poate. Numerele scrise de profesor sunt multiplu de 3. (2 puncte) Suma, diferenţa şi produsul a două numere multiplu de 3 sunt multiplu de 3 (2 puncte) şi deci toate numerele care se pot scrie pe tablă sunt multiplu de 3. (1 punct) Cum numărul 2015 nu este multiplu de 3 el nu poate să fie scris pe tablă. (2 puncte) ■

**P 4** *Determinaţi numerele naturale $n$ care au proprietatea că dintr-un pătrat de latură $n$ se poate tăia un dreptunghi de dimensiune* $(n+1)\times 1$

Dorel I. Duca

**R. 4** Tăiem din pătratul $ABCD$ dreptunghiul $MNPQ$: latura $MN$ este paralelă cu diagonala $AC$ şi latura $NP$ cu diagonala $BD$. În triunghiul dreptunghic $AMN$, dacă luăm $MQ = 1$ atunci obţinem $AM = AQ = \sqrt{2}/2$. Din triunghiul dreptunghic $MBN$, deducem $MN^2 = 2\left(n - \sqrt{2}/2\right)^2$. (3 puncte)

Dacă $MN \geq n+1$, atunci tăierea dreptunghiului este posibilă. Dar $MN \geq n+1$ este echivalent cu $MN^2 \geq (n+1)^2$ adică cu

$$2\left(n^2 - \sqrt{2}n + \frac{1}{2}\right) \geq n^2 + 2n + 1,$$

de unde deducem $n \geq 2\left(\sqrt{2}+1\right)$. Prin urmare tăierea dreptunghiului este posibilă dacă $n \geq 5$. (2 puncte) Pentru $n = 4$, 3, 2 şi 1 tăierea nu este posibilă. (2 puncte) ■

## CLASA a X-a

**P 5** *Dacă $n \geq 2$ este un număr întreg, determinaţi mulţimea*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x + \sqrt{n} \in \mathbb{Q} \ , \ x^3 + \sqrt{n} \in \mathbb{Q}\}.$$

***

**R. 5** Dacă $n$ este pătrat perfect, atunci evident $A = \mathbb{Q}$. (1 punct)

Dacă $n$ nu este pătrat perfect $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Fie $x \in A$; atunci $r = x + \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. (1 punct) Urmează că

$$\begin{aligned} x^3 + \sqrt{n} &= \left(r - \sqrt{n}\right)^3 + \sqrt{n} = \\ &= r^3 + 3rn - \left(3r^2 + n - 1\right)\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \quad \text{(3 puncte)} \end{aligned}$$

ceea ce este imposibil deoarece $r^3 + 3rn \in \mathbb{Q}$, $3r^2 + n - 1 \in \mathbb{Q}$, $3r^2 + n - 1 > 0$ şi $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. (2 puncte)

Aşadar

$$A = \begin{cases} \mathbb{Q}, \text{dacă } n \text{ este pătrat perfect} \\ \emptyset, \text{ dacă } n \text{ nu este pătrat perfect.} \end{cases}$$

■

**P 6** *Dacă ecuaţia de gradul al doilea*

$$x^2 + ax + b = 0,$$

*are coeficienţii $a$ şi $b$ întregi şi rădăcinile întregi diferite de $k - 1$, $k$ şi $k + 1$, atunci numărul*

$$b + ak + k^2$$

*este compus (adică nu este prim).*

Dorel I. Duca

**R. 6** Dacă notăm cu $x_1$ şi $x_2$ rădăcinile ecuaţiei, atunci

$$b + ak + k^2 = x_1x_2 - k\left(x_1 + x_2\right) + k^2 = \left(x_1 - k\right)\left(x_2 - k\right). \text{ (3 puncte)}$$

Deoarece $x_1 - k$ şi $x_2 - k$ sunt întregi, diferite de $-1$, $0$ şi $1$, (2 puncte) deducem că $b + ak + k^2$ este produsul a două numere întregi $(x_1 - k)$ şi $(x_2 - k)$. (2 puncte) ■

**P 7** *Poate fi exprimat numărul*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$$

*sub forma unei sume formată din cel mult 92 pătrate ale unor numere diferite?*

Dorel I. Duca

**R. 7** Da. Numerele 3, 4 şi 5 sunt pitagorice, prin urmare avem $3^2 + 4^2 = 5^2$. Atunci şi numerele $(3k)$, $(4k)$ şi $(5k)$ sunt pitagorice, aşadar avem

$$(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

Dacă $5k > 100$, $3k \leq 100$, $4k \leq 100$, adică $k \in \{21, 22, 23, 24, 25\}$, atunci perechile de numere $\left((3k)^2, (4k)^2\right)$ pot fi înlocuite cu numărul $(5k)^2$.

Urmează că

$$\begin{array}{rl}
(63^2 \text{ şi } 84^2) & \text{se pot înlocui cu } 105^2, \\
(66^2 \text{ şi } 88^2) & \text{se pot înlocui cu } 110^2, \\
(69^2 \text{ şi } 92^2) & \text{se pot înlocui cu } 115^2, \\
(72^2 \text{ şi } 96^2) & \text{se pot înlocui cu } 120^2, \\
(75^2 \text{ şi } 100^2) & \text{se pot înlocui cu } 125^2.
\end{array}$$

(5 puncte - fiecare înlocuire 1 punct) Cum numărul $100^2$ a fost înlocuit, în locul lui punem $100^2$ înlocuind astfel perechea $(60^2, 80^2)$ cu un singur pătrat. (1 punct) Numărul $80^2$ a fost înlocuit; dar în locul lui putem pune $80^2$ înlocuind perechea $(48^2, 64^2)$ cu un singur pătrat. Numărul $60^2$ a fost înlocuit, în locul lui punem $60^2$ înlocuind astfel perechea $(36^2, 48^2)$ cu un singur pătrat. (1 punct) ■

**P 8** *Pentru fiecare număr complex $z$ definim mulţimea*

$$A_z = \{1 + z + z^2 + \cdots + z^n \;:\; n \in \mathbb{N}\}.$$

*Să se determine numerele complexe $z$ pentru care $A_z$ este mulţime finită.*

Vladimir Cerbu, GM problema nr. 26851

**R. 8** Mulţimea $A_0 = \{1\}$ este finită. (1 punct) Mulţimea $A_1 = \mathbb{N}^*$ nu este finită. (1 punct) Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$; atunci

$$A_z = \left\{ \frac{z^n - 1}{z - 1} \;:\; n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{(2 puncte)}$$

şi deci mulţimea $A_z$ este finită dacă şi numai dacă mulţimea

$$B_z = \{z^n \;:\; n \in \mathbb{N}\} \quad \text{(2 puncte)}$$

este finită, adică dacă şi numai dacă $z$ este rădăcină de un anumit ordin a unităţii.

În concluzie, mulţimea $A_z$ este finită dacă şi numai dacă

$$z \in \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : \text{ există } n \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } z^n = 1\}. \quad \text{(1 punct)}$$

■

## CLASA a XI-a

**P 9** *a) Găsiţi două matrice pătratice de ordinul doi, $A$ şi $B$, cu elemente numere reale cu proprietatea că*

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

*b) Dacă $A$ şi $B$ sunt matrice pătratice de ordinul doi cu elemente numere reale care satisfac egalitatea $(*)$ atunci $AB \neq BA$.*

***

**R. 9** *a)* Matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(2 puncte)}$$

satisfac egalitatea $(*)$.

*b)* Dacă matricele $A$ şi $B$, care satisfac relaţia $(*)$, ar comuta, atunci am avea

$$\begin{aligned} -24 &= \det\left(A^2 + B^2\right) = \det\left((A + iB)(A - iB)\right) = \\ &= \det(A + iB)\det(A - iB) = \det(A + iB)\det\left(\overline{A + iB}\right) = \\ &= \det(A + iB)\overline{\det(A + iB)} = \left|\det(A + iB)\right|^2 \geq 0. \quad \text{(4 puncte)} \end{aligned}$$

Contradicţie. Prin urmare avem $AB \neq BA$. (1 punct) ■

**P 10** *Fie $A$ şi $B$ două matrice pătratice de ordinul 3. Să se arate că dacă*

$$A + B = AB,$$

*atunci matricele $A$ şi $B$ au acelaşi rang.*

***

**R. 10** Din $A + B = AB$ deducem că

$$(A - I)(B - I) = I \quad \text{(1 punct)}$$

şi atunci

$$1 = \det I = \det\left[(A - I)(B - I)\right] = \det(A - I) \times \det(B - I) \qquad \text{(2 puncte)}$$

deci

$$\det(A-I) \neq 0 \neq \det(B-I) \qquad \text{(1 punct)}$$

ceea ce înseamnă că matricele $(A-I)$ şi $(B-I)$ au rangul 3. (1 punct)

Pe de altă parte, din $A+B=AB$ obţinem

$$A=(I-A)B \quad \text{şi} \quad B=A(I-B). \quad \text{(1 punct)}$$

Prin urmare, matricele $A$ şi $B$ au acelaşi rang, deoarece matricele $(I-A)$ şi $(I-B)$ au rangul 3. (1 punct) ■

**P 11** *Dacă notăm cu* $S$ *mulţimea tuturor şirurilor* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de numere reale* $x_n \in (0,1)$, $(n \in \mathbb{N})$, *convergente către* 0, *să se determine mulţimea*

$$\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln y_n} : \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S, \ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S, \ \textit{există} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln y_n} \right\}.$$

Dorel I. Duca

**R. 11** Vom arăta că $A=[0,+\infty]$.

Fie $(x_n), (y_n) \in S$ cu proprietatea că limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln y_n}$ există. Deoarece, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, avem $\ln x_n, \ln y_n \in (-\infty, 0)$, deducem că $A \subseteq [0,+\infty]$. (1 punct)

Pentru a dovedi incluziunea inversă, fie $a \in [0,+\infty]$. Să arătăm că există şiruri $(x_n), (y_n) \in S$ pentru care limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln y_n} = a$.

1) $a=0$. Fie $(x_n), (y_n)$ cu termenul general

$$x_n = \frac{1}{n+1}, \quad y_n = \frac{1}{(n+1)^n}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Evident $(x_n), (y_n) \in S$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Prin urmare $0 \in A$. (2 puncte)

2) $a=+\infty$. Fie $(x_n), (y_n)$ cu termenul general

$$x_n = \frac{1}{(n+1)^n}, \quad y_n = \frac{1}{n+1}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Evident $(x_n), (y_n) \in S$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)^n}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln(n+1)}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Prin urmare $+\infty \in A$. (2 puncte)
3) $a \in \mathbb{R}$. Fie $(x_n)$, $(y_n)$ cu termenul general

$$x_n = \frac{1}{(n+1)^a}, \quad y_n = \frac{1}{n+1}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Evident $(x_n)$, $(y_n) \in S$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln (n+1)^a}{\ln (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a \ln (n+1)}{\ln (n+1)} = \lim_{n\to\infty} a = a.$$

Prin urmare $a \in A$. (2 puncte) ■

**P 12** *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n+\ln n}}$$

Dorel I. Duca

**R. 12** Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, punem

$$x_n := \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n+\ln n}};$$

atunci

$$\ln x_n = \frac{1}{n+\ln n} \sum_{k=1}^{n} \ln \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n+\ln n} \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{n+k}{nk}. \quad \text{(1 punct)}$$

Pentru calculul limitei şirului $(\ln x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folosim teorema lui Cesáro-Stolz, (1 punct)obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \ln \frac{n+1+k}{k(n+1)} - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln \frac{n+k}{nk}}{n+1+\ln (n+1) - n - \ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{2(2n+1)}{n+1} - \ln \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} - \ln (n+1)}{1 + \ln \frac{n+1}{n}} = -\infty.$$

(4 puncte - fiecare egalitate 1 punct) Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0. \quad \text{(1 punct)}$$

■

## CLASA a XII-a

**P 13** *Să se arate că dintre toate ecuaţiile de forma*

$$a \cos x + b \sin x + c = 0$$

*cu $a, b, c$ parametrii reali, nu toţi zero, ecuaţiile ale căror soluţii formează un grup aditiv sunt următoarele*

$$\sin x = 0 \quad \textit{şi} \quad \cos x - 1 = 0.$$

***

**R. 13** Fie

$$G = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \cos + b \sin x + c = 0\}.$$

Cum $G$ este grup, rezultă că $0 \in G$. Scriind că $x = 0$ este soluţie, obţinem

$$a + c = 0. \quad \text{(1 punct)}$$

Considerăm două cazuri după cu $A)$ $a = 0$ şi $B)$ $a \neq 0$.

$A)$ Dacă $a = 0$, atunci $c = 0$ şi deci $b \neq 0$. Ecuaţia devine $\sin x = 0$ a cărei mulţime a soluţiilor este

$$G = \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{(1 punct)}$$

care este grup aditiv.

$B)$ Dacă $a \neq 0$, atunci ecuaţia devine

$$a \cos + b \sin x - a = 0$$

sau

$$\sin \frac{x}{2} \left( b \cos \frac{x}{2} - a \sin \frac{x}{2} \right) = 0. \quad \text{(1 punct)}$$

Ecuaţia $\sin \frac{x}{2} = 0$ are ca mulţime a soluţiilor mulţimea

$$G_1 = \{2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}, \qquad \text{(1 punct)}$$

iar ecuaţia $b \cos \frac{x}{2} - a \sin \frac{x}{2} = 0$ are ca mulţime a soluţiilor mulţimea

$$G_2 = \{2 \arctan \frac{b}{a} + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}. \quad \text{(1 punct)}$$

Atunci $G = G_1 \cup G_2$ este în mod necesar grup. Elementul

$$x_0 = 2 \arctan \frac{b}{a} \in G_2 \subseteq G$$

deci

$$x_0 + x_0 = 2x_0 \in G = G_1 \cup G_2.$$

1) Dacă $2x_0 \in G_1$, atunci există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x_0 = k\pi$, deci $\arctan \frac{b}{a} = k\pi$ de unde rezultă $k = 0$. (1 punct)

2) Dacă $2x_0 \in G_2$, atunci atunci există $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $2x_0 = x_0 + 2p\pi$ de unde rezultă $x_0 = 2p\pi$, deci

$$\arctan \frac{b}{a} = p\pi.$$

Obţinem în mod necesar $p = 0$. În concluzie $\arctan \frac{b}{a} = 0$, deci $\frac{b}{a} = 0$, prin urmare $b = 0$. Urmează că ecuaţia iniţială devine

$$a \cos x - a = 0$$

cu $a \neq 0$, adică $\cos x - 1 = 0$, ecuaţie care are ca mulţime a soluţiilor mulţimea $G_1$ care este un grup aditiv. (1 punct) ■

**P 14** *Fie $n$ un număr natural nenul şi $(G, \cdot)$ un grup astfel încât $f : G \to G$, $f(x) = x^{n+1}$ este un morfism surjectiv şi $g : G \to G$, $g(x) = x^n$ este o funcţie injectivă. Să se demonstreze că grupul $G$ este abelian.*

Marian Cucoaneş, GM problema nr. 26885

**R. 14** Cum $f$ este morfism, rezultă că $(xy)^{n+1} = x^{n+1}y^{n+1}, \forall x, y \in G$. Atunci

$$x(xy)^n y = (yx)^{n+1} = x^{n+1}y^{n+1} \quad \text{(1 punct)}$$

deci

$$(yx)^n = x^n y^n, \ \forall x, y \in G. \quad \text{(1 punct)}$$

Obţinem

$$y^{n+1}x^{n+1} = (yx)^{n+1} = (yx)^n yx = x^n y^{n+1} x,$$

deci

$$y^{n+1}x^n = x^n y^{n+1}, \ \forall x, y \in G. \ \text{(1 punct)}$$

Fie $x$ şi $a$ două elemente din $G$. Din surjectivitatea lui $f$, există $y \in G$ cu $y^{n+1} = a$. (1 punct) Atunci

$$ax^n = y^{n+1}x^n = x^n y^{n+1} = x^n a,$$

deci

$$ax^n a^{-1} = x^n. \text{(1 punct)}$$

Rezultă că

$$\left(axa^{-1}\right)^n = x^n, \ \text{(1 punct)}$$

iar din injectivitatea lui $g$ obţinem

$$axa^{-1}=x \quad \text{deci} \quad ax=xa. \quad \text{(1 punct)}$$

Cum $a$ şi $x$ au fost alese arbitrare, rezultă concluzia. ■

**P 15** *Să se determine numerele reale $a$ şi $b$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin*

$$f(x)=\left(x^2+ax+b\right)\operatorname{sgn}\left(x^2-5x+6\right), \text{ oricare ar fi } x\in\mathbb{R},$$

*admite primitive pe $\mathbb{R}$; determinaţi, în acest caz, o primitivă $F$ a funcţiei $f$ pe $\mathbb{R}$.*

Dorel I. Duca

**R. 15** Avem

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & \text{dacă } x<2\\ 0 & \text{dacă } x=2\\ -x^2-ax-b, & \text{dacă } 2<x<3\\ 0, & \text{dacă } x=3\\ x^2+ax+b, & \text{dacă } x>3. \quad \text{(1 punct)}\end{cases}$$

Presupunem că funcţia $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$, atunci primitivele lui $f$ au forma:

$$G(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases} \frac{x^3}{3}+a\frac{x^2}{2}+bx+\mathcal{C}_1, & \text{dacă } x<2\\ A & \text{dacă } x=2\\ -\frac{x^3}{3}-a\frac{x^2}{2}-bx+\mathcal{C}_2, & \text{dacă } 2<x<3\\ B, & \text{dacă } x=3\\ \frac{x^3}{3}+a\frac{x^2}{2}+bx+\mathcal{C}_3, & \text{dacă } x>3. \quad \text{(1 punct)}\end{cases}$$

Din continuitatea primitivei $G$ deducem că

$$G(2-0)=G(2+0)=G(2) \quad \text{şi} \quad G(3-0)=G(3+0)=G(3).$$

Urmează că

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}_1=-\tfrac{16}{3}-4a-4b+\mathcal{C}_2,\\ &\mathcal{C}_3=-18-9a-6b+\mathcal{C}_2,\\ &A=-\tfrac{8}{3}-2a-2b+\mathcal{C}_2,\\ &B=-9-\tfrac{9}{2}a-3b+\mathcal{C}_2. \quad \text{(1 punct)}\end{aligned}$$

Cum orice primitivă este derivabilă, avem

$$G'(2-0)=G'(2+0) \quad \text{şi} \quad G'(3-0)=G'(3+0). \quad \text{(1 punct)}$$

de unde obţinem că $a=-5$, $b=6$. (1 punct)

Aşadar, putem lua

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x, & \text{dacă } x<2\\ -\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-6x+\frac{28}{3}, & \text{dacă } 2\le x\le 3\\ \frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x+\frac{1}{3}, & \text{dacă } x>3.\quad \text{(1 punct)}\end{cases}$$

Evident funcţia $F$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'=f$. (1 punct) ■

**P 16** *a) Să se arate că există o infinitate de funcţii* $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, *derivabile pe* $(0,1)$, *care au proprietatea că*

$$f'(\mathrm{e}^x)=x,\ \textit{oricare ar fi } x\in(-\infty,0).$$

*Determinaţi o astfel de funcţie* $f$.

*b) Există funcţii* $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, *derivabile pe* $(0,1)$, *care au proprietatea că*

$$f'(\sin x)=x,\ \textit{oricare ar fi } x\in(0,\pi)?$$

*Dacă răspunsul este afirmativ determinaţi o astfel de funcţie* $f$, *dacă răspunsul este negativ justificaţi-l!*

Dorel I. Duca

**R. 16** *a)* Facem schimbarea de variabilă $u:=\mathrm{e}^x$, adică $x=\ln u$. (1 punct) Atunci

$$f'(u)=\ln u,\ \text{oricare ar fi } u\in(-\infty,\mathrm{e}).\quad \text{(1 punct)}$$

şi deci

$$f(u)=u\ln u-u+\mathcal{C},\ \text{oricare ar fi } u\in(-\infty,\mathrm{e}).\quad \text{(1 punct)}$$

Prin urmare, există o infinitate de funcţii derivabile $f$ care satisfac relaţia de la *a)*. (1 punct)

*b)* Dacă o astfel de funcţie $f$ ar exista, atunci pentru

$$x=\frac{\pi}{4}\ \text{am avea } f'\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\quad \text{(1 punct)}$$

şi pentru

$$x=\frac{3\pi}{4}\ \text{am avea } f'\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)=f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}\quad \text{(1 punct)}$$

deci $f'$ ia valori diferite pentru aceeaşi valoare a argumentului, $\sqrt{2}/2$. Contradicţie. (1 punct) ■